ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Thị Bình

NGHIỆM YẾU CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH P-LAPLACE PHÂN THỨ TRÊN MIỀN BỊ CHẶN VỚI SỐ MŨ TỚI HẠN.

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Thị Bình

NGHIỆM YẾU CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH P-LAPLACE PHÂN THỨ TRÊN MIỀN BỊ CHẶN VỚI SỐ MŨ TỚI HẠN.

Chuyên ngành: Toán Giải Tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. Nguyễn Văn Thìn

Thái Nguyên - Năm 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Bình

Xác nhận	**xác nhận**
của khoa chuyên môn	**của người hướng dẫn**
	TS. Nguyễn Văn Thìn

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Thìn. Thầy đã tận tình hướng dẫn, giải đáp những thắc mắc, giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Một lần nữa tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất đến thầy! Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn đến Ban Chủ Nhiệm khoa Toán và các thầy cô trong tổ Bộ môn Giải tích đã tạo điều kiện cho tôi được làm luận văn, đã quan tâm và đôn đốc tôi trong quá trình làm luận văn. Luận văn là sản phẩm của đề tài "Nghiệm yếu của một số lớp phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng chứa toán tử p-Laplace thứ và toán tử Bessel" với mã số B2020-TNA-06. Tôi xin cảm ơn sự hỗ trợ về kinh phí từ đề tài góp phần hoàn thiện luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Nguyễn Thị Bình

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn luận văn

Hiện nay, các nhà toán học đã dành sự quan tâm vào nghiên cứu các toán tử không địa phương loại elliptic (bao gồm loại toán tử laplace phân thứ $(-\Delta)^s$) trong cả nghiên cứu toán học thuần túy và toán học ứng dụng. Nghiệm của hệ phương trình p-laplace khá quan trọng trong nhiều ngành khoa học như các ngành điện từ trường, thiên văn học, cơ chất lỏng,... Trong bối cảnh địa phương các nhà toán học đã nghiên cứu hệ phương trình chứa toán tử p-laplace mà hàm phi tuyến có độ tăng tới hạn thông qua đa tạp Nahari. Một mở rộng của $(-\Delta)^s$ là toán tử p-Laplace phân thứ $(-\Delta)_p^s$, được định nghĩa bởi:

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+ps}} dy, x \in \mathbb{R}^n.$$

toán tử này và mở rộng của nó được nghiên cứu bởi một số tác giả trên thế giới trong thời gian gần đây.

Các bài toán dạng Kirchhoff mô tả một số hiện tượng vật lý. Kirchhoff [13] đã nghiên cứu phương trình:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int\limits_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

một mở rộng của phương truyền sóng D' Alambert, mô tả sự thay đổi độ dài của dây trong quá trình rung động, trong đó ρ, p_0, h, E, L là các hằng số. Phương trình trên chứa đại lượng không địa phương $\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int\limits_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$, phụ thuộc vào trung bình $\int\limits_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$ của động năng $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2$ trên $[0, L]$. Hơn nữa các bài toán dạng (1.1) được sử dụng trong nhiều mô hình vật lý và hệ sinh học, trong đó u được mô tả như một quá trình. Có nhiều bài toán kiểu Kirchhoff đã được nghiên cứu cho các lớp toán tử khác nhau. Thời gian gần đây, bài toán Kirchhoff đã được nghiên cứu cho toán tử Laplace phân thứ, p-Laplace phân thứ trong [2], [3], [8], trên miền bị chặn với điều kiện biên Dirichlet hay Neumann. Về hệ phương trình chứa toán tử p-Laplace cũng nghiên cứu được bởi nhiều tác giả bằng nhiều cách khác nhau như phương pháp biến phân, đa tạp Nehari [1], [11], [13], [14]. Với mong muốn tiếp tục hướng nghiên cứu trên, chúng tôi chọn đề tài "Nghiệm yếu của hệ phương trình p-Laplace phân thứ trên miền bị chặn với số mũ tới hạn" làm luận văn cao học.

2. Phương pháp nghiên cứu

Luận văn sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn là nghiên cứu nghiệm yếu của hệ phương trình chứa toán tử p-laplace phân thứ trên miền bị chặn với số mũ tới hạn khi đại lượng phi tuyến đổi dấu. Ngoài ra, chúng tôi cũng tìm hiểu về nghiệm yếu của hệ phương trình chứa toán tử p-laplace phân thứ với số mũ tới hạn và đại lượng lồi.

4. Nội dung của luận văn

Luận văn gồm 2 chương:

- Chương 1. Nghiệm yếu của hệ phương trình chứa toán tử p-Laplace phân thứ với đại lượng phi tuyến đối dấu .

- Chương 2. Nghiệm yếu của hệ phương trình chứa toán tử p-Laplace phân thứ chứa số mũ tới hạn và đại lượng lồi.

Chương 1

Nghiệm yếu của hệ phương trình chứa toán tử p-Laplace phân thứ với đại lượng phi tuyến đổi dấu

1.1 Giới thiệu về bài toán và một số kết quả phụ trợ

Trong phần này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và nghiệm bội cho hệ phương trình sau:

$$
(P_{\lambda,\mu})\begin{cases}
M\left(\int\limits_{2n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}dxdy\right)(-\Delta)_p^s u(x) & \\
=\lambda f(x)|u|^{q-2}u+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta} & \text{trong } \Omega\\
M\left(\int\limits_{2n}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}dxdy\right)(-\Delta)_p^s v(x) & \\
=\mu g(x)|v|^{q-2}v+\frac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v & \text{trong } \Omega\\
u=v=0 \text{ trong } \mathbb{R}^n\backslash\Omega &
\end{cases},
$$

trong đó $(-\Delta)_p^s$ là các toán tử p-Laplace phân thứ được định nghĩa bởi:

$$
(-\Delta)_p^s u(x)=2\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B_\epsilon(0)}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+ps}}dy, x\in\mathbb{R}^n,
$$

trong đó $M(t)=a+bt, a,b>o$, $p\geq 2, 1<q<p$, $2p<r\leq p_s^*$, $ps<n<2ps$ với $s\in(0,1), \lambda,\mu$ là các số thực, $\Omega\in\mathbb{R}^n$ là miền giới hạn với giới hạn trơn và f,g thỏa mãn các giả định sau:

(f_1) $f, g \in L^{\gamma}(\Omega)$ với $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-q}$;
(f_2) $f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \neq 0$ trong $\overline{\Omega}$ và $g^+(x) = \max\{g(x), 0\} \neq 0$ trong $\overline{\Omega}$ (f và g có thể đổi dấu trên $\overline{\Omega}$).

Trong chương này chúng tôi chứng minh sự tồn tại của nghiệm bội không âm đối với hệ phương trình kiểu Kirchhoff loại elliptic với toán tử p-phân thứ và đại lượng phi tuyến đổi dấu bằng cách nghiên cứu các thuộc tính của đa tạp Nehari đối với tham số λ và μ. Cho $1 < p < \infty$, ta xét không gian

$$X = \{u | u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ là đo được}, u|_{\Omega} \in L^p(\Omega), \left(\frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}\right) \in L^p(Q)\}$$

Trong đó $Q = \mathbb{R}^{2n} \backslash (C\Omega \times C\Omega)$ và $C\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Khi đó, X là không gian định chuẩn, với chuẩn xác định bởi:

$$||u||_X = \left(||u||_{L^p(\Omega)} + \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

là một không gian Banach phản xạ. Ta ký hiệu

$$X_0 = \{h \in X : h = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}.$$

Không gian X_0 là một không gian Banach với chuẩn được xác định bởi

$$||u||_{X_0} = \left(\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Lưu ý rằng trong phương trình (1.1) và (1.2), các tích phân có thể được mở rộng đến $\mathbb{R}^{2n}$, từ $u = 0$ trong $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Bây giờ để tìm ra các nghiệm của bài toán $(P_{\lambda,\mu})$ chúng ta xét không gian tích $E := X_0 \times X_0$ với chuẩn xác định bởi

$$\|(u, v)\| = \left(\|u\|_{X_0}^p + \|v\|_{X_0}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hàm năng lượng của bài toán $(P_{\lambda,\mu})$ được xác định bởi:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u, v) = &\frac{1}{p}\widehat{M}\left(\|u\|_{X_0}^p\right) + \frac{1}{p}\widehat{M}\left(\|v\|_{X_0}^p\right) \\ &- \frac{1}{q}\left(\lambda \int_\Omega f(x)|u|^q dx + \mu \int_\Omega g(x)|v|^q dx\right) - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx,\end{aligned}$$

trong đó $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)\, ds$ là nguyên hàm của M.

Định nghĩa 1.1.1. Cặp hàm $(u,v) \in E$ được gọi là nghiệm yếu của $(P_{\lambda,\mu})$ nếu

$$M(||u||_{X_0}^p)\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$+ M\left(\|v\|_{X_0}^p\right)\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$= \lambda\int\limits_{\Omega} f(x)\,|u|^{q-2}u\varphi(x)\,dx + \mu\int\limits_{\Omega} g(x)\,|v|^{q-2}v\psi(x)\,dx$$

$$+ \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int\limits_{\Omega} |u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}\varphi(x)\,dx + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int\limits_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v\psi(x)\,dx$$

với mọi $(\varphi,\psi) \in E$.

Đa tạp Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ liên kết với bài toán $(P_{\lambda,\mu})$ được định nghĩa bởi:

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu} = \left\{(u,v) \in E\setminus\{0\} : \left\langle \mathcal{J}_{\lambda,\mu}^{'}(u,v),(u,v)\right\rangle = 0\right\},$$

trong đó $\langle , \rangle$ là tích đối ngẫu giữa E và không gian đối ngẫu. Đặt

$$S_\Gamma = \left\{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} : \left((|\lambda|\,\|f\|_\gamma)^{\frac{p}{p-q}} + (|\mu|\,\|g\|_\gamma)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} < \Gamma\right\}.$$

Tiếp theo chúng ta nghiên cứu bản chất của đa tạp Nehari tương ứng với bài toán $(P_{\lambda,\mu})$. Trong trường hợp $\alpha+\beta \geq 2p$ hàm số $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}$ không bị chặn dưới E. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng nó bị chặn trên một tập con thích hợp trên E và cực tiểu $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}$ đạt được trên các tập con này, chúng ta nhận được các nghiệm cho bài toán $(P_{\lambda,\mu})$. Theo định nghĩa của $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$, $(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ khi và chỉ khi

$$M\left(\|u\|_{X_0}^p\right)\|u\|_{X_0}^p + M\left(\|v\|_{X_0}^p\right)\|v\|_{X_0}^p - \lambda\int\limits_{\Omega} f(x)\,|u|^q\,dx$$

$$-\mu\int\limits_{\Omega} g(x)|v|^q dx - 2\int\limits_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta}dx = 0.$$

Bây giờ ta xác định $\phi_{(u,v)} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, đã biết như ánh xạ thớ

$$\phi_{(u,v)}(t) = \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu,tv)$$

. Cho $(u,v) \in E$, ta có: